

4장 물질의 입자성

복사의 입자적 성질 : Planck의 흑체복사이론, Einstein의 광전효과, Compton 산란

4.1 물질의 원자적 성질

세상은 원자로 구성되어 있다. 세상은 알갱이로 구성되어 있다.

원자세계

- 1) 원자의 성질의 측정은 간접적이다.
- 2) 거시적 측정을 토대로 미시세계를 영리하게 추론한다.

■ 그들 시대의 혼동되는 것들에서 원리를 찾아낸 위대한 원자론자들의 고귀한 로맨스

- 1) Democritus 와 Leucippus : 세상에서 변하지 않는 실체는 운동하는 원자이다.
- 2) Lavoisier : 물질의 보존(화학 반응에서 질량 보존의 원리 확립)
- 3) Dalton : 배수 비례의 법칙 → 원자의 존재를 인식
- 4) Avogadro : 같은 온도와 압력을 가진 순수 기체는 단위 체적 당 같은 분자 수를 갖는다.

$$PV = Nk_B T \quad \text{or} \quad \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T}$$

- 5) Maxwell : 기체분자운동론, 기체분자들의 역학적 물리량들의 분포의 평균
- 6) Jean Perrin, Einstein : Brown 운동에 관한 이론적, 실험적 연구
 - 🌻 Brown 운동은 분자, 원자의 존재를 입증시켜주는 현상이다.
 - 🌻 원자 분자의 가설에 대한 부가적인 확인
 - 🌻 아보가드로수의 정확한 값을 얻는데 일조함
- 7) Einstein : 유비쿼터스(Ubiquitous)

3.3 원자의 구성

■ 원자는 밀집된 양전하의 핵 주위를 음으로 대전된 입자가 회전하는 것

1. 전기분해법칙 : 1833. Michael Faraday
2. 음극선의 본질은 전자, e/m 의 측정 : 1897. J.J.Thomson
 - 🌻 전자는 모든 물질의 공통 구성체
3. 전자의 전하 측정 : 1909. Robert Millikan
4. 원자의 핵모형 : Ernest Rutherford 와 Geiger, Marsden.
 - 🌻 원자의 크기 : 전자무리의 구름의 반경, $\sim 10^{-10}\text{m}$
 - 🌻 핵 : 양전하, 10^{-14}m

Faraday의 전기분해법칙

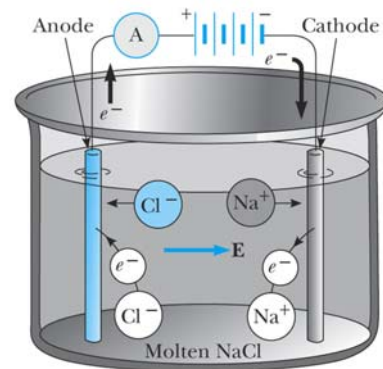
한 전극에서 방출되는 원자의 질량은 이동한 전하와 방출된 물질의 원자량에는 비례하고 원자가에는 반비례한다.

※소금물의 전기분해

1 faraday = 96,500 C의 전기를 흘리면 음극에 23.0g의 Na, 양극에 35.5g의 염소기체가 발생한다.

$$m = \frac{(q)(\text{molar mass})}{(96,500\text{C})(\text{valance})}$$

$$\begin{cases} m & : \text{석출된 물질의 질량(g)} \\ q & : \text{흘려준 전하량(coulomb)} \\ \text{molar mass} & : \text{1mole의 질량(g)} \\ \text{valance} & : \text{원자가} \end{cases}$$



예제 4.1 BaCl₂의 전기분해

BaCl₂ 수용액에 10.0A의 전류를 1 시간동안 흘렸다. 석출된 Ba와 Cl의 양은?
<풀이>

$$\begin{aligned} m_{\text{Ba}} &= \frac{(q)(\text{molar weight})}{(96,500\text{C})(\text{valence})} \\ &= \frac{(10.0\text{C/s})(3600\text{s})(137\text{g})}{(96,500\text{C})(2)} = 25.6\text{g} \end{aligned}$$

$$M_{\text{Cl}} = \frac{(10\text{c/s})(3600\text{s})(35.5\text{g})}{(96,500\text{c})(1)} = 13.2\text{g}$$

♠ Faraday의 전기분해법칙의 암시

- 1) 물질은 분자로 이루어지고, 분자는 원자들로 구성되어 있다.
- 2) 전하가 양자화되어 있다.
- 3) 원자의 아원자 부분은 양(+)과 음(-)의 전하를 갖는다.

■ J. J. Thomson의 e/m_e 측정

♣ 1897년 기체의 진공방전

- 1) 음극선은 전자이다.
- 2) 원자도 더 낮은 구성요소로 분해된다.

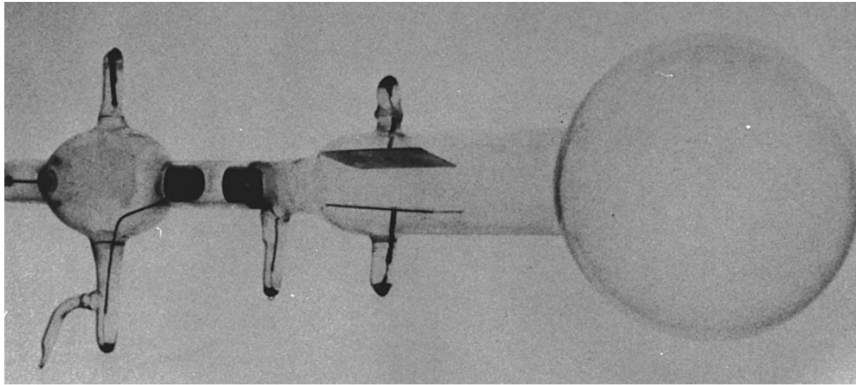


그림 4.4 톰슨이 사용한 원래의 e/m_e 튜브

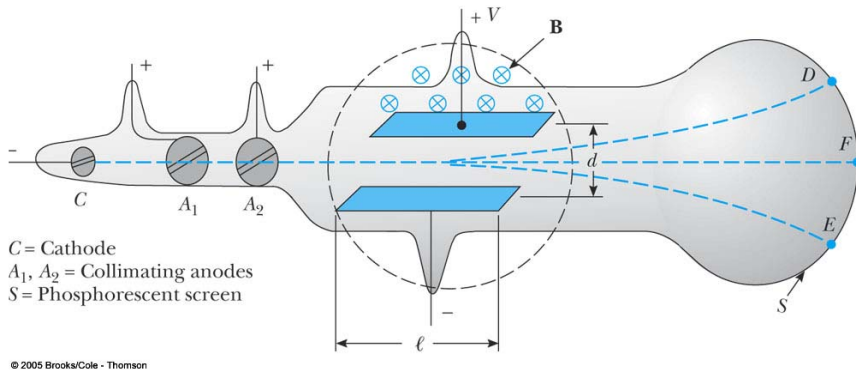


그림 4.5 톰슨의 e/m_e 튜브의 그림

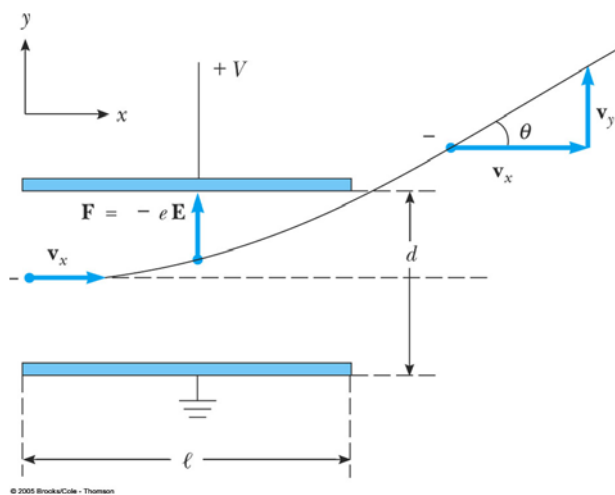


그림 4.6 전기장에 의한 음(-) 입자의 편향

서로 수직한 전기장(\vec{E})과 자기장(\vec{B})속을 직진하는 음극선을, 자기장을 제거한 후 편향각의 크기를 측정한다.

$$v_y = a_y t \quad (4.2)$$

$$a_y = F/m = Ee/m = Ve/md, \quad t = l/v_x \quad \text{이므로}$$

$$v_y = \frac{Vle}{mv_x d} \quad (4.3)$$

$$\tan\theta = v_y/v_x \quad \text{이므로}$$

$$\tan\theta = \frac{Vl}{v_x^2 d} \left(\frac{e}{m} \right) \quad (4.4)$$

편향각이 작을 경우 $\tan\theta \simeq \theta$ 이므로

$$\theta \simeq \frac{Vl}{v_x^2 d} \left(\frac{e}{m} \right) \quad (4.5)$$

(전장+자장)에서 편향되지 않은 전자는

$$qE = qv_x B$$

$$v_x = \frac{E}{B} = \frac{V}{Bd} \quad (4.6)$$

(4.6)을 (4.5)에 대입하여

$$\frac{e}{m} = \frac{V\theta}{B^2 l d} \quad (4.7)$$

초기측정값(by Thomson) : $e/m \sim 1.0 \times 10^{11} \text{c/kg}$

현재 인정되는 값 : $e/m = 1.758803 \times 10^{11} \text{c/kg}$

- ♣ 전자의 발견 \Rightarrow 당시 알려진 수소이온의 비전하($e/m_{\text{He}} \sim 10^8 \text{c/kg}$)로부터 수소원자(가장 작은 원자)보다 1000배 더 작은 질량의 입자를 발견하였다!..
- ◆ 전자는 모든 물질의 일반적 구성체이다
- ◆ 인간의 아원자 세계로의 첫발(first glimpse into the subatomic world!)

예제 4.2 전기장과 자기장에 의한 전자선의 편향

Thomson 실험

$V = 200\text{V}$, $l = 5\text{cm}$, $d = 1.5\text{cm}$, $\theta = 0.20\text{rad}$ 일 때 자장(B)의 크기는?

<풀이>

$e/m = V\theta/B^2 l d$ 로부터

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{V\theta}{ld(e/m)}} \\ &= \left[\frac{(200\text{V})(0.20\text{rad})}{(0.05\text{m})(0.015\text{m})(1.76 \times 10^{11} \text{c/kg})} \right]^{1/2} \\ &= 5.5 \times 10^{-4} \text{N}/(\text{m/s})\text{c} \\ &= 5.5 \times 10^{-4} \text{T} \quad \text{or} \quad 5.5 \text{gauss} \end{aligned}$$

지구의 자기장의 크기, $0.5 \times 10^{-4} \text{T}$ 의 11배의 자기장

연습문제 1 이 경우 수평속력 v_x 를 구하라

답 $2.4 \times 10^7 \text{m/s} = 0.080c$

Millikan의 기본 전하 값

♣ Thomson (1899)

- ☀ 자외선을 쬐여준 아연으로부터 방출된 전하 : $2.3 \times 10^{-19} \text{C}$
- ☀ 이온화하는 x-선과 라듐 방출에 의해 생성된 전하 : $1.1 \times 10^{-19} \text{C}$
- ☀ 이 전하는 용액의 전기분해에서 수소원자에 의해 운반된 전하와 크기가 같다.

♣ Thomson과 Wilson

대전된 구름으로부터 전기소량을 측정

일정한 속도로 낙하하는 구름(물방울)이 받는 힘은

$$D = 6\pi a \eta v \quad \text{Stoke의 법칙} \quad (4.8)$$

- ☀ a : 방울의 반경, η : 공기의 점성, v : 방울의 종단속도

$$w = mg = (4/3)\pi a^3 \rho g = D = 6\pi a \eta v$$

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}} \quad (4.9)$$

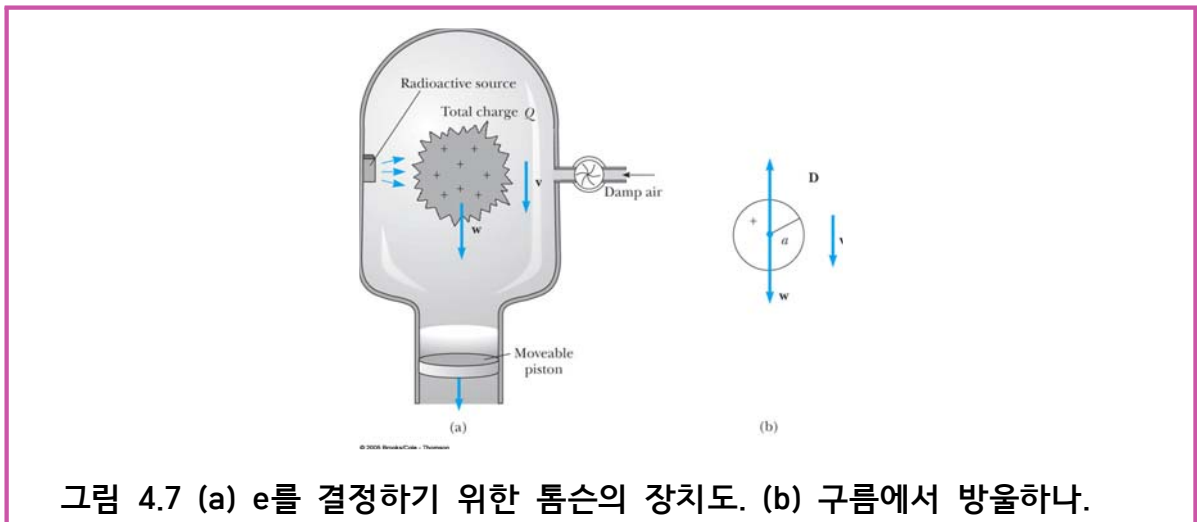


그림 4.7 (a) e 를 결정하기 위한 톰슨의 장치도. (b) 구름에서 방울하나.

1. 대전된 기체이온으로부터 전기소량(e)을 측정.

- ☀ 대전된 기체이온 → 단열팽창 → 구름형성(이온이 응집중심역할) → 건조관 통과

☀ ion의 전하량 = $\frac{Q}{M/m}$

M : 건조관의 질량증가, Q : 총전하량, m : 구름방울의 평균질량

2. 구름방울의 평균질량의 측정 ← 중력에 의한 물방울의 낙하속도로부터
3. Milikan의 기름방울실험의 효시

♣대전된 물방울의 중력에 의한 낙하

운동방정식

$$mg - bv = m \frac{dv}{dt}$$

$-bv$: 속도에 비례하는 저항

물방울의 종속도는

$$v_t = \frac{mg}{b}$$

Stokes의 법칙에 의해

$$b = 6\pi\eta a \quad \begin{array}{l} a : \text{반지름} \\ \eta : \text{점성계수} \end{array}$$

물방울의 질량

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

따라서 종속도는

$$v_t = \frac{2}{9} g a^2 \frac{\rho}{\eta}$$

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v_t}{2\rho g}} \quad (4.9)$$

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho : \text{물방울의 질량}$$

$$e = \frac{Q}{M/m} : \text{ion의 전하량}$$

♣Townsend의 계산

- 총 물방울의 수 : 물방울의 총 질량과 평균 반지름
- 각 이온이 갖는 전하량 = 총 전하량 / 총 물방울의 수
 $\sim 1 \times 10^{-19} \text{ coul}$

♣J. J. Thomson과 H. A. Wilson 의 개량

전기장의 인가 : 전기장과 중력의 동시 작용

→정밀도상의 문제

- 구름방울의 증발
- 각 물방울이 단일 전하량을 갖고 있다는 가정

♣Milikan의 시도

강한 전기장의 인가 : 물방울을 정지시켜 증발속도를 보정하기위해

■ Milikan의 기름방울 실험 (1909년)

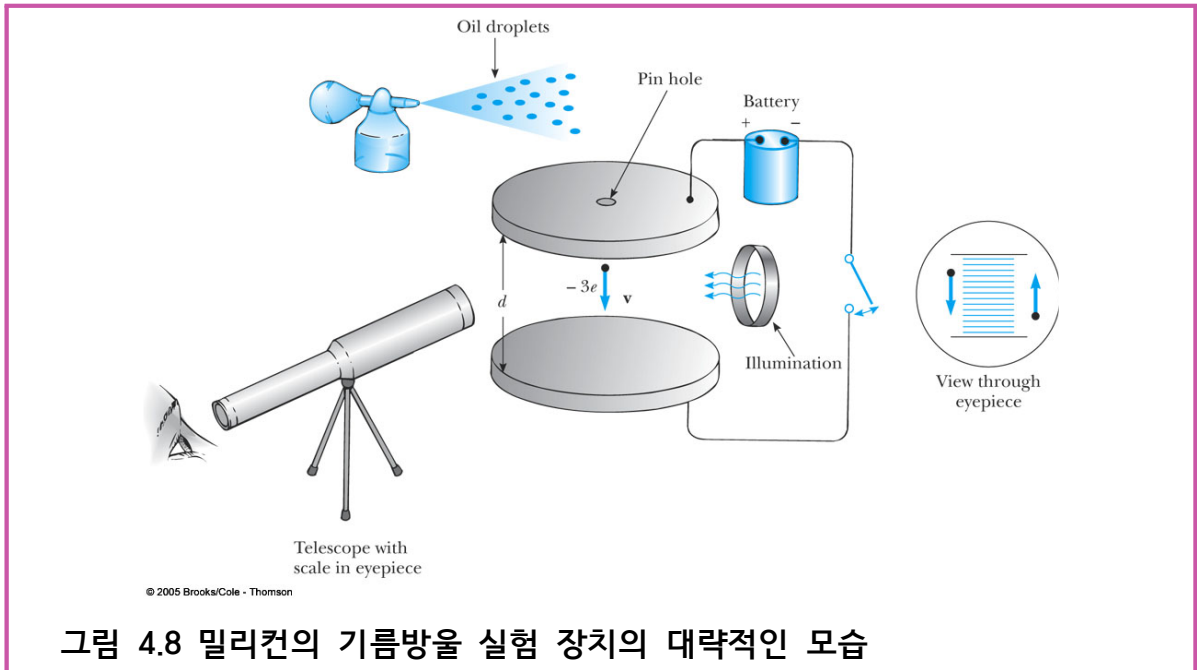


그림 4.8 밀리컨의 기름방울 실험 장치의 대략적인 모습

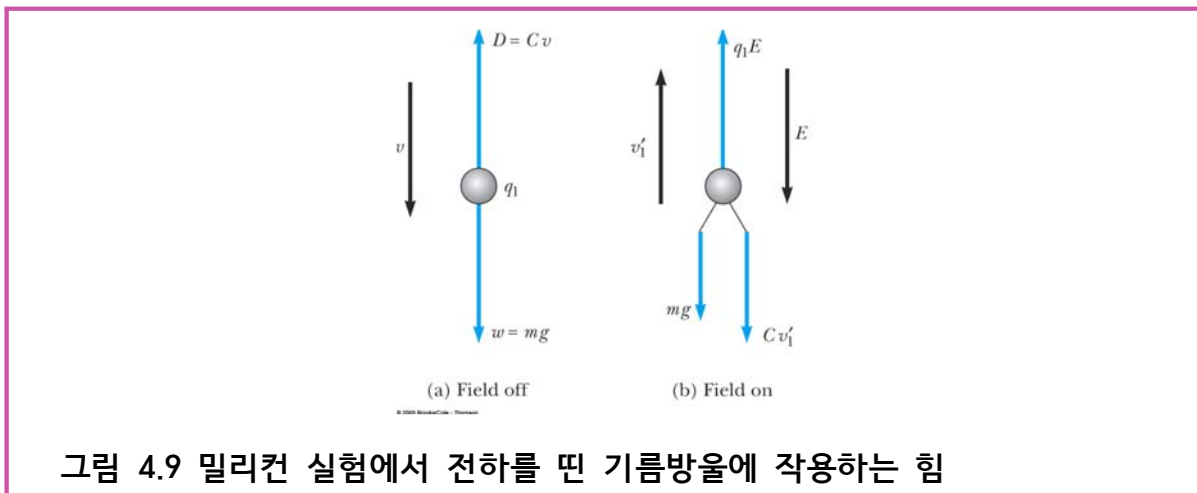


그림 4.9 밀리컨 실험에서 전하를 띤 기름방울에 작용하는 힘

축전기의 극판($\sim 10^3$ volt) 사이에 기름방울을 분사
 마찰전기로 대전된 기름방울을 관찰

- 하강 : 전기장 없이 중력에 의한 낙하(v)
- 상승 : 전기장으로 위로 운동(v')

$$mg - Cv = m \frac{dv}{dt} \quad : \quad \text{운동방정식}$$

$$v = \frac{mg}{C} \quad : \quad \text{종속도} \quad (*1)$$

위쪽으로 운동할 때의 전하 q_n 의 운동방정식은

$$q_1 E - mg - Cv'_1 = m \frac{dv'_1}{dt}$$

$$v_1' = \frac{q_1 E - mg}{C} \quad : \quad \text{상승종속도} \quad (*2)$$

기름방울은 순식간에 종속도에 도달한다. (*1)과 (*2)식에 의해

$$q_1 = \frac{mg}{E} \left(\frac{v + v_1'}{v} \right) \quad (4.10)$$

추가로 전하를 포획하여 새로운 종속도 v_2' 에 도달하면, q_2 는

$$v_2' = \frac{q_2 E - mg}{C}$$

$$q_2 = \frac{mg}{E} \left(\frac{v + v_2'}{v} \right) \quad (4.11)$$

식 (4.10)을 (4.11)로 나누면

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v + v_1'}{v + v_2'} \quad (4.12)$$

(4.12)의 속력 비가 정수들의 비라면 \rightarrow 연속적인 전하는 기본전하의 배수이다.

기름방울의 질량의 결정

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}} \quad (4.9)$$

$$m = \rho \cdot \text{부피} = \rho \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (4.13)$$

~~~~~[Tipler]~~~~~

(4.10), (4.11)로부터, 포획한 전하량은

$$q_2 - q_1 = \frac{mg}{E} \left( \frac{v_2 - v_1}{v} \right)$$

☀  $v, v_1$  및  $v_2$ 의 결정 : 강하 혹은 상승하는 시간을 측정하여 결정한다.

☀  $v = \frac{2}{9} g a^2 \frac{\rho}{\eta}$  로부터 기름방울의 질량(m)을 결정한다.

☀  $q_1, q_2$  혹은  $q_2 - q_1$ 를 구한후 이들의 최대공약수를 구한다.  $\rightarrow$  전기소량  $e$

~~~~~[End]~~~~~


예제 4.3 e 의 실험적 측정

Millikan 실험에서

기름방울의 상승, 낙하 거리 : 0.6cm, 낙하시간 : 21.0s

상승시간 : $t_1 = 46.0, t_2 = 15.5, t_3 = 28.1, t_4 = 12.9, t_5 = 45.3, t_6 = 20.0$ sec

기름의 밀도 : $\rho = 858 \text{kg/m}^3$ 공기의 점성 : $\eta = 1.83 \times 10^{-5} \text{kg/m} \cdot \text{s}$

평행판 축전기: $d = 1.60 \text{cm}, V = 4550 \text{V}$

(a) 전하가 양자화되어 있음을 보여라.

(풀이) $q_1/q_2, q_2/q_3, q_3/q_4$ 등이 박은 정수의 비라면 전하는 양자화되어 있다.

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v + v'_1}{v + v'_2}, \quad \frac{q_2}{q_3} = \frac{v + v'_2}{v + v'_3}$$

속력을 구한다

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0.600 \text{cm}}{21.0 \text{s}} = 0.0286 \text{cm/s} \quad v'_1 = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0.600 \text{cm}}{46.0 \text{s}} = 0.0130 \text{cm/s}$$

$$v'_2 = 0.600/15.5 = 0.0387 \text{cm/s} \quad v'_3 = 0.600/28.1 = 0.0214 \text{cm/s}$$

$$v'_4 = 0.600/12.9 = 0.0465 \text{cm/s} \quad v'_5 = 0.600/45.3 = 0.0132 \text{cm/s}$$

$$v'_6 = 0.600/20.0 = 0.0300 \text{cm/s}$$

이다 그러므로

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v + v'_1}{v + v'_2} = \frac{0.0286 + 0.0130}{0.0286 + 0.0387} = 0.618 \approx \frac{3}{5}$$

$$\frac{q_2}{q_3} = \frac{v + v'_2}{v + v'_3} = \frac{0.0286 + 0.0387}{0.0286 + 0.0214} = 1.35 \approx \frac{4}{3}$$

$$\frac{q_3}{q_4} = \frac{v + v'_3}{v + v'_4} = \frac{0.0286 + 0.0214}{0.0286 + 0.0465} = 0.666 \approx \frac{2}{3}$$

$$\frac{q_4}{q_5} = \frac{v + v'_4}{v + v'_5} = \frac{0.0286 + 0.0465}{0.0286 + 0.0132} = 1.80 \approx \frac{9}{5}$$

$$\frac{q_5}{q_6} = \frac{v + v'_5}{v + v'_6} = \frac{0.0286 + 0.0132}{0.0286 + 0.0300} = 0.713 \approx \frac{8}{11} \text{ or } \frac{7}{10}$$

(b) 방울의 반지름은

(풀이)

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}} \\ &= \left[\frac{9(1.83 \times 10^{-5} \text{kg/m} \cdot \text{s})(0.0286 \times 10^{-2} \text{m/s})}{2(858 \text{kg/m}^3)(9.81 \text{m/s}^2)} \right]^{1/2} \\ &= [2.81 \times 10^{-12} \text{m}^2]^{1/2} \text{ or } 1.67 \mu\text{m} \end{aligned}$$

부피는

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 = 1.95 \times 10^{-17} \text{m}^3$$

질량은

$$m = \rho V = (858 \text{kg/m}^3)(1.95 \times 10^{-17} \text{m}^3) = 1.67 \times 10^{-14} \text{kg}$$

(c) 방울의 전하를 계산하고 이 결과로부터 기본전하를 추정하라.

(풀이)

$$E = \frac{V}{d} = \frac{4550 \text{V}}{0.0160 \text{m}} = 2.84 \times 10^5 \text{V/m}$$

방울의 전하를 계산하면

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{mg}{E} \left(\frac{v + v_1'}{v} \right) \\ &= \frac{(1.67 \times 10^{-14} \text{kg})(9.81 \text{m/s}^2)}{(2.84 \times 10^5 \text{V/m})} \left(\frac{0.0286 + 0.0130}{0.0286} \right) \\ &= 8.39 \times 10^{-19} \text{C} \end{aligned}$$

마찬가지로

$$q_2 = 13.6 \times 10^{-19} \text{C} \quad q_3 = 10.1 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$q_4 = 15.2 \times 10^{-19} \text{C} \quad q_5 = 8.43 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$q_6 = 11.8 \times 10^{-19} \text{C}$$

그 당시에 알려진 기본전하 값의 범위는 $1.5 \times 10^{-19} \text{C}$ 과 $2.0 \times 10^{-19} \text{C}$ 사이였으므로, 이 값으로 q_1, q_2, \dots 을 나누어 각 방울의 기본전하의 정수배의 범위를 알게 된다.

$$q_1 \text{의 범위} : \frac{8.39}{1.5} = 5.6 \sim \frac{8.39}{2.0} = 4.2$$

$$q_2 \text{의 범위} : 9.1 \sim 5.8 \quad q_3 \text{의 범위} : 6.7 \sim 5.1$$

$$q_4 \text{의 범위} : 10.1 \sim 7.6 \quad q_5 \text{의 범위} : 5.6 \sim 4.2$$

$$q_6 \text{의 범위} : 7.9 \sim 5.9$$

허용 범위의 중간에 있는 정수를 선택하면

$$e_1 = q_1/5 = 1.68 \times 10^{-19} \text{C} \quad e_2 = q_2/8 = 1.70 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$e_3 = q_3/6 = 1.68 \times 10^{-19} \text{C} \quad e_4 = q_4/9 = 1.69 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$e_5 = q_5/5 = 1.69 \times 10^{-19} \text{C} \quad e_6 = q_6/7 = 1.69 \times 10^{-19} \text{C}$$

이 값의 평균을 취하면

$$e = 1.688 \times 10^{-19} \text{C} \quad \text{을 얻는다.}$$

비전도성 기름, 글리세린(반도체), 수은(도체)등으로 실험 → 어느 경우에도 분수의 전하는 발견되지 않았다.

Stoke의 법칙의 보정

$$D = \frac{6\pi a \eta v}{1 + \alpha(L/a)} \quad (4.14)$$

- L : 매질(공기)분자의 평균 자유행정
- $\alpha = 0.81$ 로 두었을 때, 반지름이 서로 다른 방울에 대하여 일정한 e 값을 얻게된다.

Millikan 이 구한 값

$$e = 1.591 \times 10^{-19} \text{coul}$$

현금 $e = 1.602189 \times 10^{-19} \text{coul} \leftarrow$ X-선 회절방법

■ Rutherford의 원자 모형

20세기 초반의 원자에 대한 견해

- 🌸 처음부터 존재하여 아직까지 남아 있는 것 ; Maxwell(1872)
- 🌸 원자는 더 나눌 수 있다. ; Thomson
- 🌸 방사능의 실험 ; Curie, Rutherford
- 🌸 원소의 방사능 변환을 아원자 입자의 방출로 설명 ; Frederick Soddy
- 🌸 원자의 다공성 ; 전자가 얇은 금속과 운모 박막을 쉽게 투과한다.
Lenard
- 🌸 복잡한 원자 스펙트럼선이 원자 내에서 운동하는 전하에 의해 생긴다는 막연한 생각

건포도 푸딩 원자모형

- 🌸 양(+)전하를 가진 균일 질량 분포의 구 내부에 음(-)전하를 가진 전자가 푸딩 속 건포도처럼 박혀 있어서 전기적으로 중성을 이루고 있는 원자모형.
- 🌸 원자의 선 스펙트럼선을 설명하는 데 실패

Rutherford 연구소

- 🌸 Rutherford, Geiger 및 Marsden
- 🌸 α -입자의 q/m ; 양성자의 $1/2 \Rightarrow \text{He}^{++}$ 로 짐작, 방사선 방출 후 He 기체가 생성됨을 분광학적으로 확인
- 🌸 α -입자 ; 다른 원자들을 탐구하는데 우수한 탐침

■ Rutherford 실험의 결과

- 🌸 대부분의 알파입자는 편이 되지 않는다.
- 🌸 1° 정도의 편이
- 🌸 몇 개의 입자는 90° 또는 그 이상으로 편이
- 🌸 35cm인 포탄이 얇은 종이에 의해 반사되어 되돌아오는 것 같이 믿기 어려운 결과
- 🌸 α -입자의 큰 편향은 무거운 핵과의 한 번의 큰 충돌에서 생긴 현상.

예제 4.4 α -입자d와 양성자의 충돌

(a) α -입자(m_α, v_α)와 양성자(m_p)의 정면충돌

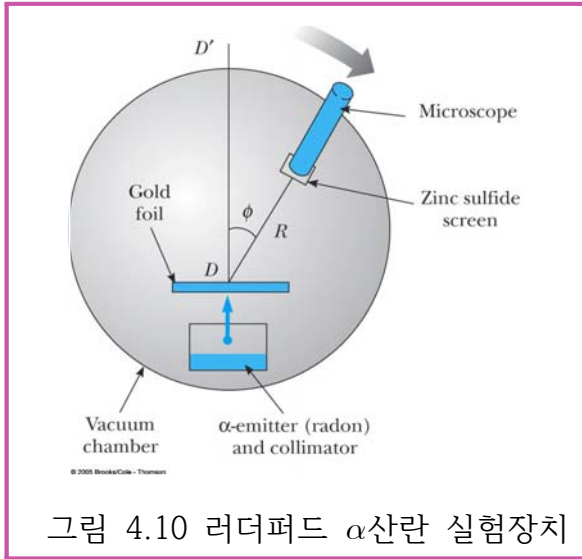


그림 4.10 러더퍼드 α 산란 실험장치

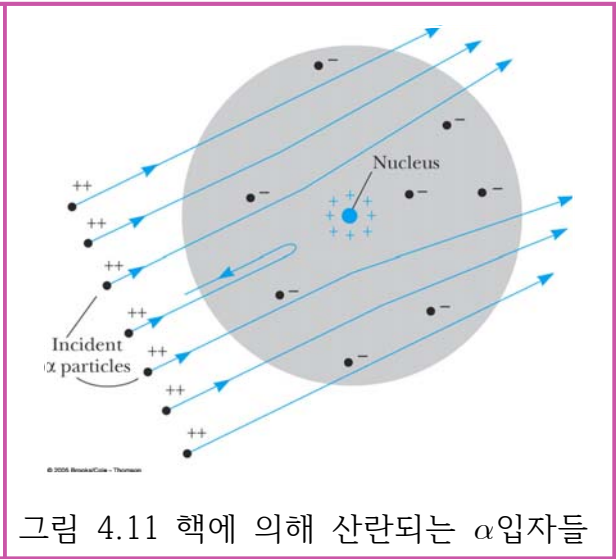


그림 4.11 핵에 의해 산란되는 α 입자들

$$v_p = \left(\frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_p} \right) v_\alpha$$

$$v_{\alpha'} = \left(\frac{m_\alpha - m_p}{m_\alpha + m_p} \right) v_\alpha$$

(b) 양성자와 충돌하는 α -입자의 경우 속도의 퍼센트 변화를 계산하라.

(풀이)

(a) 충돌이 탄성이므로 전체 운동 에너지는 보존된다.

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_{\alpha'}^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 \quad (1)$$

• 운동량 보존은

$$m_\alpha v_\alpha = m_p v_p + m_\alpha v_{\alpha'} \quad (2)$$

• 식 1에서

$$(m_\alpha v_{\alpha'})^2 = m_\alpha (m_\alpha v_\alpha^2 - m_p v_p^2) \quad (3)$$

• 식 2로부터 $(m_\alpha v_{\alpha'})^2$ 을 구하여 식 3과 같다고 놓으면

$$(m_\alpha v_\alpha)^2 + (m_p v_p)^2 - 2m_\alpha m_p v_\alpha v_p = (m_\alpha v_\alpha)^2 - m_\alpha m_p v_p^2$$

• 혹은

$$(m_p v_p)(m_p v_p - 2m_\alpha v_\alpha + m_\alpha v_p) = 0$$

• 이 방정식의 해는

$$v_p = 0$$

• 와

$$v_p = \left(\frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_p} \right) v_\alpha \quad (4)$$

- 양성자의 속도는 식 4만이 타당한 해이다.

(b) $m_\alpha = 4m_p$ 이므로

$$v_p = \left(\frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_p} \right) v_\alpha = \left(\frac{8m_p}{5m_p} \right) v_\alpha = 1.60v_\alpha$$

$$v_{\alpha'} = \left(\frac{m_\alpha - m_p}{m_\alpha + m_p} \right) v_\alpha = \left(\frac{3m_p}{5m_p} \right) v_\alpha = 0.60v_\alpha$$

- α -입자의 속도의 퍼센트 변화는

$$\left(\frac{v_{\alpha'} - v_\alpha}{v_\alpha} \right) \times 100\% = -40\%$$

연습문제 2 α -입자와 전자의 정면 충돌

답 $v_e = 1.998v_\alpha$, $v_\alpha' = 0.9998v_\alpha$, v_α 의 %변화는 -0.02%

큰 각도의 α -입자의 산란은 하나의 핵과의 충돌에 의한 결과

α -입자와 핵과의 상호작용 ; 쿨롱력

$$F = k \frac{(2e)(Ze)}{r^2} \quad (4.15)$$

산란각 ϕ 에서 단위 시간당 검출기로 들어오는 α -입자의 수 Δn 은

$$\Delta n = \frac{k^2 Z^2 e^4 N n A}{4R^2 (1/2 m_\alpha v_\alpha^2)^2 \sin^4(\phi/2)} \quad (4.16)$$

N ; 박막에서 단위면적당 핵의 수(박막 두께에 비례함)

n ; 단위 시간당 표적으로 입사하는 α -입자의 전체수

A ; 검출기의 면적

원자번호 Z 에 따른 산란 의존성 ; Z 의 결정

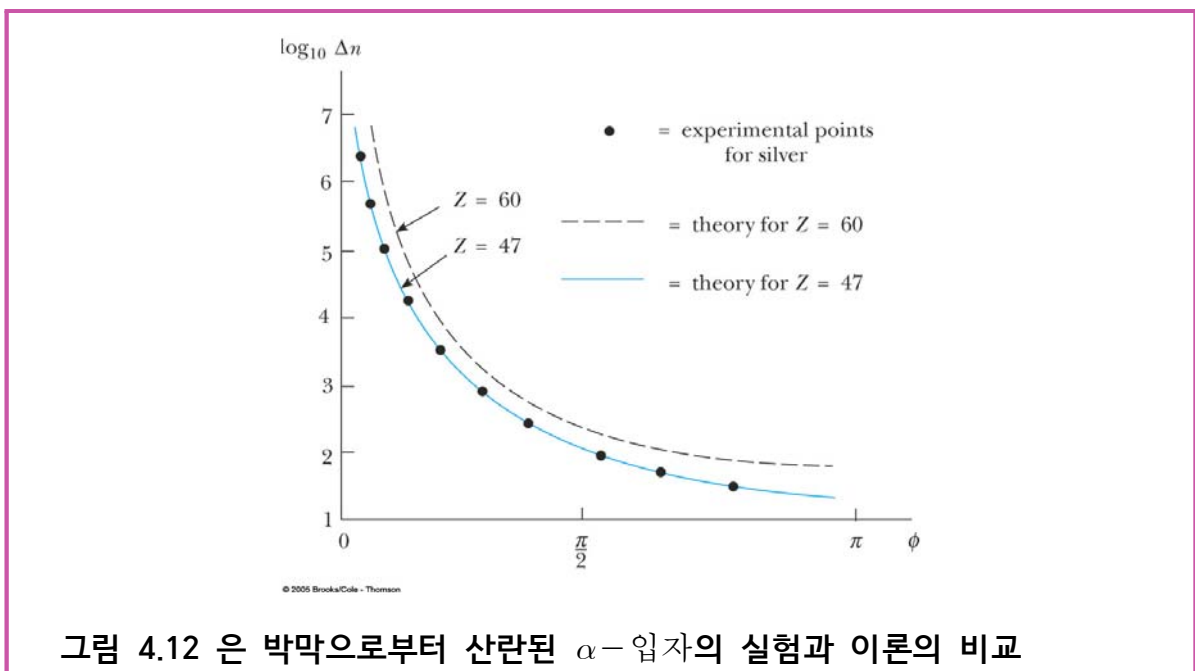


그림 4.12 은 박막으로부터 산란된 α -입자의 실험과 이론의 비교

예제 4.5 알루미늄 핵 반지름의 추정

Rutherford(1919)는 Al($Z=13$)으로부터 큰 각도로 산란된 7.7 MeV의 α -입자 경우, 식 4.16이 성립하지 않음을 알았다. 알루미늄 핵의 반지름을 추정하라.

(풀이)

$$\frac{1}{2}m_{\alpha}v_{\alpha}^2 = k\frac{(Ze)(2e)}{d_{\min}} \quad (4.17)$$

$$d_{\min} = k\frac{2Ze^2}{K_{\alpha}} = \frac{2(13)(1.60 \times 10^{-19}\text{C})^2(8.99 \times 10^9\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)}{(7.7 \times 10^6\text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\text{J/eV})} = 4.9 \times 10^{-15}\text{m}$$

📌 Rutherford 핵모형의 문제점

- 🌻 양성자 외 핵질량의 다른 반을 구성하는 것은 무엇인가?
- 🌻 양성자들을 핵(10^{-14}m) 속에 속박되어 있도록 잡아두는 응집력은 어떤 것인가?
- 🌻 원자내의 전자는 어떻게 핵 주위를 운동하고, 이들의 운동은 관측된 스펙트럼선을 어떻게 설명하는가?

Thomson 모형에 의한 산란

1) α -입자와 한 전자의 충돌

전자의 운동량의 변화 = $2mV$

α -입자의 운동량의 변화

$$\Delta p = 2m_e V \approx M_\alpha V / 4,000$$

여기서

$$\vec{\Delta p} \perp \vec{p}_\alpha \text{ 로 가정}$$

$$\Delta p / p \approx \theta \approx 1/4,000 \text{ radian} \approx 0.01^\circ$$

2) 양전하와의 충돌

$r=R$ 에서 최대의 힘이 작용

Δp 의 계산

$F(R)$ 이 $\Delta t \approx 2R/V$ 동안 작용

Colomb의 법칙

$$F = \frac{Kq_\alpha Q}{R^2} \quad ; \quad q_\alpha : \alpha\text{-입자의 전하}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{c}^2$$

$$\Delta p \approx F\Delta t = \frac{Kq_\alpha Q}{R^2} \cdot \frac{2R}{V}$$

$\vec{\Delta p}$ 가 운동량 $M_\alpha \vec{V}$ 에 수직이라고 가정할 때 최대편의각은

$$\tan \theta \approx \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{2Kq_\alpha Q}{RMV^2} = \frac{Kq_\alpha Q}{R(\frac{1}{2}MV^2)}$$

α -입자가 금박에 충돌할 때

$$E_\alpha = \left(\frac{1}{2} M_\alpha V^2\right) = 5 \text{ MeV}, \quad q_\alpha = 2e$$

Au 원자의 전하 $Q = 79e$

$$\begin{aligned} Ke^2 &= (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{c}^2) \cdot (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 \\ &= (9 \times 10^9)(1.6 \times 10^{-19})^2 \text{ joule} \cdot \text{m} \times \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ joule}} \\ &= 14.4 \times 10^{-10} \text{ eV} \cdot \text{m} = 14.4 \text{ eV} \cdot \text{\AA} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2 \times 79 \times 14.4 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{(1 \text{\AA}) \times 5 \times 10^6 \text{ eV}} \approx 4.5 \times 10^{-4}$$

$$\tan \theta \approx \theta \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ radian} \approx 0.026^\circ$$

\therefore 1. 정도의 작은 편의도 여러번에 걸친 충돌의 결과

θ_m 을 근평균제곱(rms) 산란각이라 하면 다중산란으로 θ 보다 더 큰 각으로

산란되는 수는

$$N = N_0 e^{-(\theta/\theta_m)^2}$$

N_0 ; 입자의 총수

10^{-4} cm 두께의 금박 $\rightarrow \theta_m \cong 1^\circ$; Geiger Marsden의 실험

90° 보다 더 큰 각으로 산란될 것으로 기대되는 수는

$$N_{90} = N_0 e^{-(90/1)^2} = N_0 e^{-8,100} \cong N_0 10^{-3500}$$

즉 거의(절대로) 관측되지 않는다. 그러나 관측치는

$$N_{90} \cong N_0 \frac{1}{8000} : 8,000\text{개중 한 개는 } 90\text{이상 편의}$$

10° 의 편의도

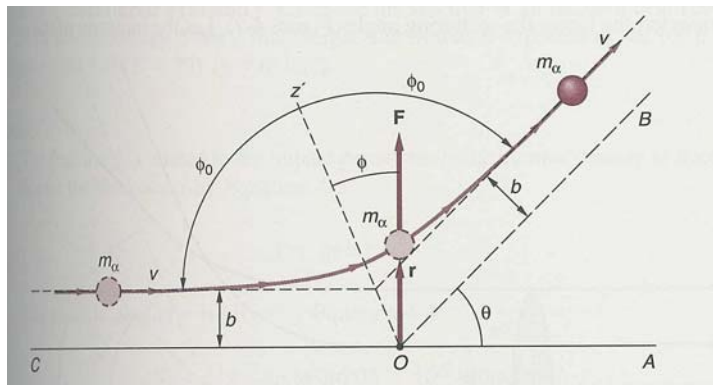
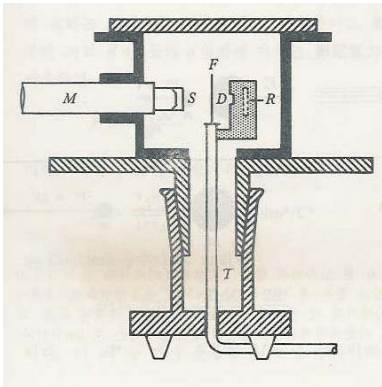
$$e^{-100} \approx 10^{-43} \cong 0$$

즉 다중산란으로는 10° 의 편의도 기대할 수 없다.

Rutherford의 가정

1. 핵 ; 원자보다 훨씬 작은 체적을 갖고 양전하로만 된 입자
2. 실험결과는 무거운 원자와 한번 충돌한 결과

α -입자의 산란에 대하여 예측되는 각분포



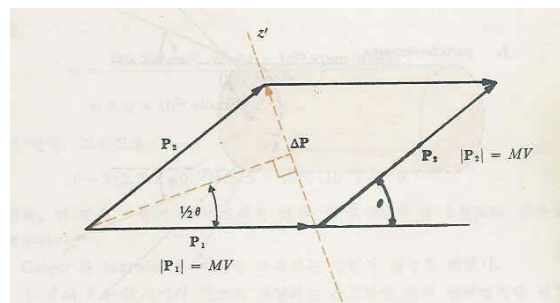
b:충돌파라메타(impact parameter) 산란경로 : 쌍곡선 ← 고전역학

\vec{p}_1 : α -입자의 초기 운동량

\vec{p}_2 : α -입자의 종말 운동량

$\vec{\Delta p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$: 총운동량의 변화

$$|\Delta \vec{p}| = 2MV \sin \frac{1}{2}\theta$$



Newton의 운동법칙으로부터

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt \quad \text{or} \quad d\vec{p} = \vec{F}dt$$

여기서 $F = \frac{Kq_\alpha Q}{r^2}$: Coulomb의 법칙

z'축 방향의 성분을 취하고 적분하면

$$\int (dp)_z = \Delta p = \int F \cos \phi dt = \int F \cos \phi \frac{dt}{d\phi} \cdot d\phi$$

α -입자의 원점에 대한 각운동량은 보존되므로

$$Mvb = Mr^2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\Delta p = \int \frac{Kq_\alpha Q}{r^2} \cos \phi \frac{r^2}{Vb} d\phi = \frac{Kq_\alpha Q}{Vb} \int \cos \phi d\phi$$

따라서

$$\Delta p = \frac{Kq_\alpha Q}{Vb} (\sin \phi_2 - \sin \phi_1)$$

여기서 $\phi_1 = -\phi_0$, $\phi_2 = +\phi_0$

그리고 $2\phi_0 + \theta = 180^\circ$, 따라서

$$\sin \phi_2 - \sin \phi_1 = 2 \sin \left(90 - \frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\Delta p = 2MV \sin \frac{1}{2} \theta \quad \text{이므로}$$

즉

$$2MV \sin \frac{1}{2} \theta = \frac{Kq_\alpha Q}{Vb} \cdot 2 \cos \frac{1}{2} \theta, \quad \text{또는}$$

$$b = \frac{Kq_\alpha Q}{MV^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (***) : \text{산란각}(\theta) \text{과 충돌 parameter}(b) \text{의 관계}$$

그러나 개개의 α -입자에 대해 충돌 parameter을 아는 것은 불가능하다.

원자핵 하나에 의하여 θ 보다 더 큰 각으로 단위시간당 산란되는 입자 수 = 충돌

parameter가 $b(\theta)$ 보다 작은 단위시간당 산란입자 수 = $\pi b^2 I_0$

I_0 : 단위 면적당 단위시간당 입자수

πb^2 : θ 보다 큰 각으로의 산란에 대한 단면적

단위체적당의 핵자수는

$$n = \frac{\rho(\text{g/cm}^3) N_A \text{ atom/mole}}{M \text{g/mole}} = \frac{\rho N_A \text{ atom}}{M \text{ cm}^3}$$

• 박의 두께가 t 인 경우 산란단면 A 에 포함된 핵의 총수 = nAt

• A : 박의 면적과 선속의 면적중 작은 쪽의 단면적

따라서 θ 보다 더 큰 각으로 매초 산란되는 총수

• = $\pi b^2 I_0 n t A$

θ 보다 큰각으로 산란되는 율은

$$f = \pi b^2 n t$$

예제) 금박의 두께가 $t = 10^{-4}$ cm인 경우 $\theta = 90^\circ$ 보다 더 큰 각으로 산란되는 율은

$$\cot(90/2) = 1$$

$$E_\alpha = 5 \text{ MeV}$$

$$b = \frac{(2)(79)Ke^2}{MV^2} = \frac{(2)(79)14.4\text{eV} \cdot \text{\AA}}{2(5 \times 10^6\text{eV})} \approx 2.3 \times 10^{-4} \text{\AA} = 2.3 \times 10^{-12} \text{cm}$$

$$n = \frac{(19.3\text{g/cm}^3)(6.02 \times 10^{23} \text{atom/mole})}{197\text{g/mole}} = 5.9 \times 10^{22} \text{atom/cm}^3$$

$$\therefore f = \pi(2.3 \times 10^{-12})^2(5.9 \times 10^{22})(10^{-4}) \approx 10^{-4}$$

8000개중 1개(1/8000)의 실험사실과 잘 부합한다.

Geiger 와 Marsden 의 실험

1. θ 와 $\theta + d\theta$ 로 산란되는 단위면적당 입자수
2. 박의 두께에 따른 산란입자수의 변화
3. 박의 원자량에 따른 입자수의 변화
4. 입사속도 V 에 따르는 산란입자수의 변화

1 개의 핵에 의해 $\theta \sim \theta + d\theta$ 사이의 각으로 산란되는 수

$$= b(\theta) \sim b(\theta + d\theta) \text{ 사이로 입사되는 입자수}$$

(***)식을 미분하여

$$db = -\frac{Kq_\alpha Q}{MV^2} \text{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta \frac{d\theta}{2} \quad (*)$$

‘-’부호는 b 가 증가함에 따라 θ 가 감소함을 의미한다.

$$| I_0 2\pi b db | = I_0 \pi \left(\frac{Kq_\alpha Q}{MV^2} \right)^2 \cot \frac{1}{2}\theta \text{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta d\theta$$

그런데

$$\cot \frac{1}{2}\theta = \frac{\cos \frac{1}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} = \frac{\sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta} = \frac{\frac{1}{2} \sin \theta}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}$$

및

$$\text{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}$$

$$q_\alpha = 2e, \quad Q = Ze$$

을 (*)에 대입하면

$$| I_0 2\pi b db | = I_0 2\pi \left(\frac{KZe^2}{MV^2} \right)^2 \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4 \frac{1}{2}\theta}$$

$\theta \sim \theta + d\theta$ 범위로 산란되는 입자가 도달하는 screen의 면적 = $2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta$
 하나의 핵에 의하여 스크린에 산란되는 입자수는

$$\frac{N}{\text{면적}} = \frac{I_0}{R^2} \left(\frac{KZe^2}{mV^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

$$\clubsuit \Delta n = \frac{k^2 Z^2 e^4 N n A}{4R^2 (1/2 m_\alpha v_\alpha^2)^2 \sin^4(\phi/2)} \quad (3.16) \quad \clubsuit \text{Serway}$$

따라서 점핵모형에서 스크린의 단위면적당 산란되는 입자수는, 단위면적당

$$\propto \sin^{-4} \frac{1}{2}\theta, \propto Z^2, \propto V^{-4}$$

※180°로 산란하는 경우 : 핵과 α -입자의 정면충돌

$$\frac{Kq_\alpha Q}{D} = \frac{1}{2} MV^2 \quad (3.17)$$

또는

$$D = \frac{Kq_\alpha Q}{\frac{1}{2} MV^2}$$

7.7 MeV의 α -입자가 정면충돌에서 가장 가까이 접근하는 거리

$$D = \frac{(2)(79)14.4\text{eV} \cdot \text{\AA}}{7.7 \times 10^6 \text{eV}} \approx 3 \times 10^{-4} \text{\AA} = 3 \times 10^{-14} \text{m}$$

→Au 핵의 반지름 $< 3 \times 10^{-14} \text{m}$

Z=13 인 Al 원자의 경우 → 큰 각도로 산란되는 가장 energy가 큰 α -입자는 (4-12)식을 만족하지 않는다.

핵의 반지름 $\sim 10^{-14} \text{m}$ (Rutherford의 추정)

1F (Fermi라고 읽는다) = $10^{-15} \text{m} = 10^{-13} \text{cm}$

따라서 핵의 반지름은 1F(가벼운 원소) \sim 10F(무거운 원소)

~~~~~[End]~~~~~

### 4.3 Bohr 원자

#### ■ 스펙트럼 계열

연속 스펙트럼 ; 뜨거운 액체와 고체, 연속적인 파장의 분포, 흑체복사  
 선 스펙트럼 ; 낮은 압력의 기체의 방전

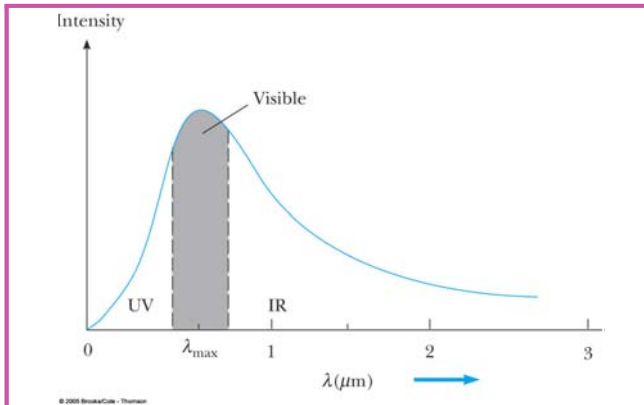


그림 4.14 6000K로 가열된 물체에서 나온 빛의 세기와 파장의 관계

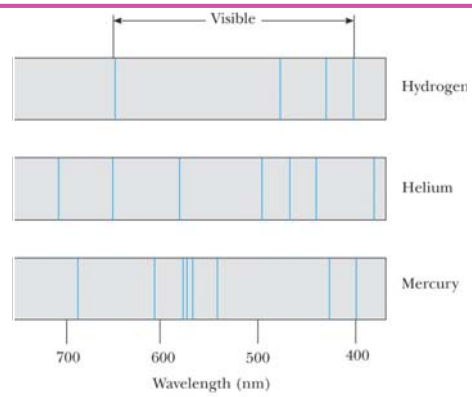


그림 4.15 대표적인 원소에서의 방출 선 스펙트럼

#### ■ 흡수 분광학(absorption spectroscopy)

프라운호퍼 선 ; 프라운호퍼(1814), 1000개 정도의 흡수선을 갖는 태양광의 연속 스펙트럼

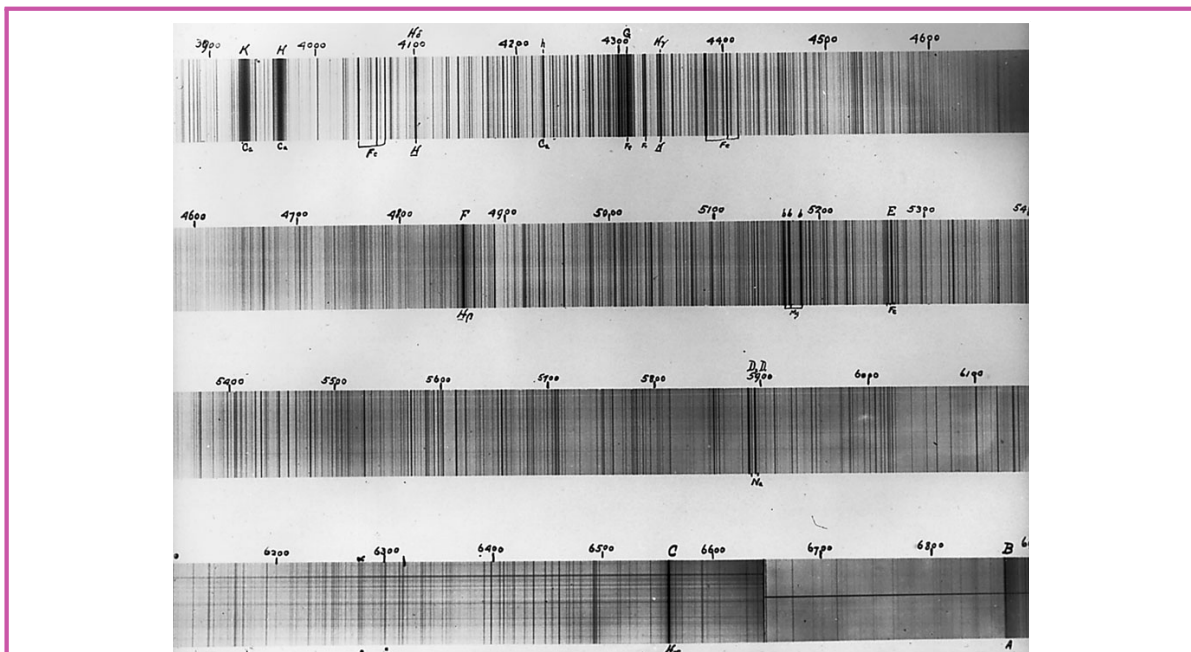


그림 4.18 고해상 분광 사진기로 찍은 태양 스펙트럼은 많은 검은 프라운호퍼선을 보여주고 있다. 파장을 옹스트롬 단위로 스펙트럼 위에 나타내었다.

### 키르히호프(Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887)

- ☀️ 프라운호퍼 선은 태양 바깥의 상대적으로 차가운 층에 있는 기화된 원자 구름의 영향
- ☀️ 프라운호퍼 D선 ; 기화된 나트륨으로부터 생성
- ☀️ 별의 구성 원자를 결정하는 방법을 열어 보임

### UV, IR 분광계

- ☀️ 흡수 스펙트럼으로 물질을 분석

### 원자 흡수 분광계

- ☀️ 미지의 물체에 존재하는 금속을 ppm 단위까지 측정하는 데 사용
- ☀️ 시료를 뜨겁게 가열하여 원자로 이루어진 기체를 형성 시킨 곳에 특정 원소의 방출선을 조사하고 흡수 정도를 측정한다.

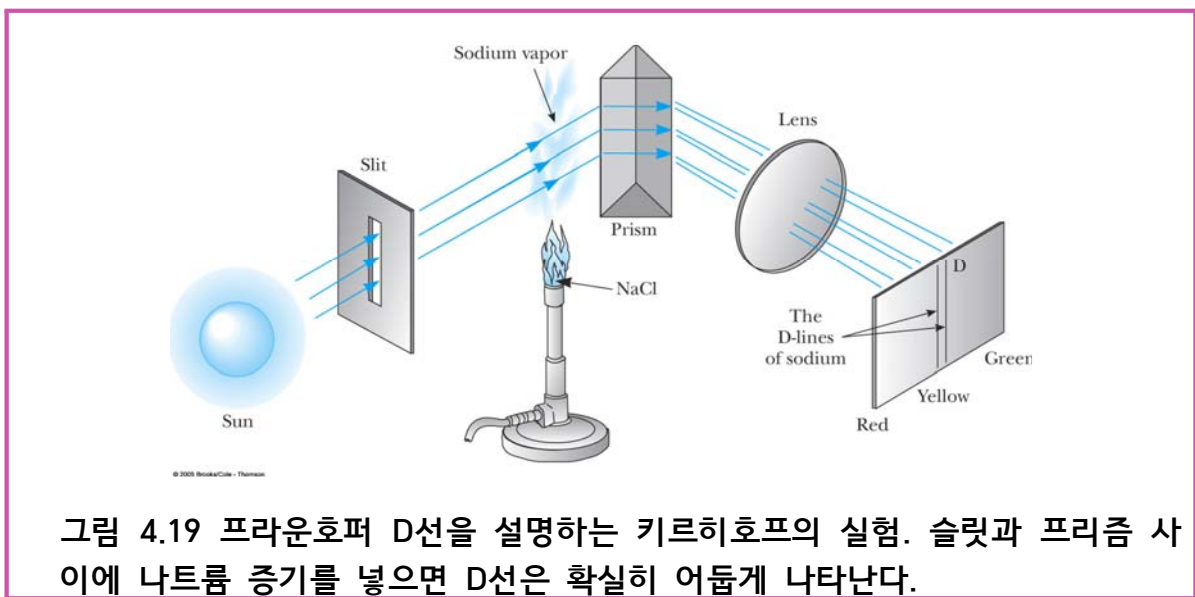


그림 4.19 프라운호퍼 D선을 설명하는 키르히호프의 실험. 슬릿과 프리즘 사이에 나트륨 증기를 넣으면 D선은 확실히 어둡게 나타난다.

### 발머(Johann Jakob Balmer), 1885 ; “수소의 스펙트럼선에 관하여” ;

$H_\alpha$ (red),  $H_\beta$ (green),  $H_\gamma$ (blue),  $H_\delta$ (violet)

$$\lambda(m) = C_2 \left( \frac{n^2}{n^2 - 2^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (4.18)$$

$C_2 = 3645.6 \times 10^{-8} \text{cm}$  ; 수렴극한(convergence limit)

또 다른 수소계열이 존재할 수 있다고 제안

$$\lambda = C_3 \left( \frac{n^2}{n^2 - 3^2} \right) \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (4.19)$$

$$\lambda = C_4 \left( \frac{n^2}{n^2 - 4^2} \right) \quad n = 5, 6, 7, \dots \quad (4.20)$$

오늘날의 표현

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (4.21)$$

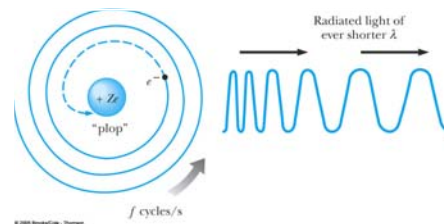
$$R = 1.0973732 \times 10^7 \text{m}^{-1} \quad ; \quad \text{Rydberg 상수} \quad (4.22)$$

표 4.1 수소원자의 스펙트럼 계열

|                      |           |                        |      |
|----------------------|-----------|------------------------|------|
| Lyman Series(uv)     | $n_f = 1$ | $n_i = 2, 3, 4, \dots$ | 1916 |
| Balmer eries(vis-uv) | $n_f = 2$ | $n_i = 3, 4, 5, \dots$ | 1885 |
| Paschen Series(IR)   | $n_f = 3$ | $n_i = 4, 5, 6, \dots$ | 1908 |
| Brackett Series(IR)  | $n_f = 4$ | $n_i = 5, 6, 7, \dots$ | 1922 |
| Pjund Series(IR)     | $n_f = 5$ | $n_i = 6, 7, 8, \dots$ | 1924 |

### Rutherford 핵원자의 딜레마

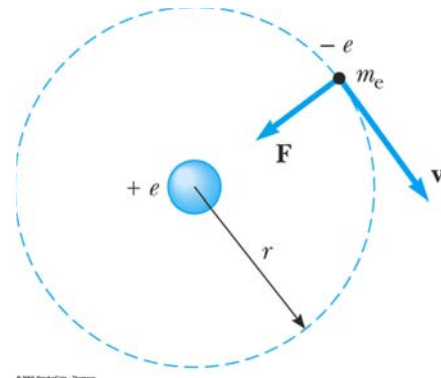
- 1. 전자가 핵으로 떨어지지 않기 위해서는 핵 주위를 회전하여야 한다.
- 궤도 진동수  $f$ 로 회전하는 전하는 진동수  $f$ 의 광파를 복사한다.
- 궤도 반지름은 감소하여 진동수는 증가하고 결국 핵과 충돌한다.



### Bohr의 수소원자 모형(1913.4)

- 고전 복사이론은 원자 크기의 계에서는 성립하지 않는다.
- 안정되고 복사하지 않는 정상상태의 에너지 준위
- $L = m_e v r = n \hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$  ; 각운동량의 양자화 (4.24)
- 한 정상상태에서 다른 정상상태로 천이할 때 광자를 방출

$$\Delta E = E_i - E_f = hf$$



### 수소원자 스펙트럼 계열을 계산함

전기 퍼텐셜 에너지

$$U = qV = -ke^2/r$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - k\frac{e^2}{r} \quad (4.25)$$

전기력이 구심력을 담당하므로

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

운동 에너지는

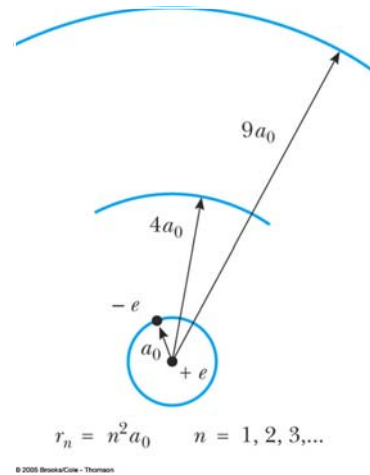
$$K = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{k e^2}{2r} \quad (4.26)$$

원자의 전체 에너지는

$$E = -\frac{k e^2}{2r} \quad (4.27)$$

식 4.24와 4.26에서  $v$ 를 소거하여 궤도 반지름은

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k e^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.28)$$



Bohr radius(보아 반지름) ;  $n = 1$ 의 궤도 반지름

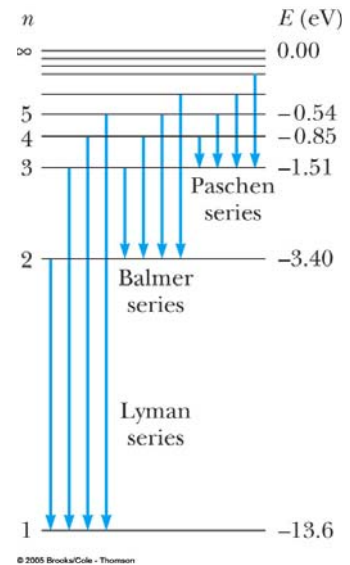
$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = 0.529 \text{ \AA} = 0.0592 \text{ nm} \quad (4.29)$$

$r_n = n^2 a_0$ 를 식 4.27에 대입하여

$$E_n = -\frac{k e^2}{2 a_0} \left( \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.31)$$

양자수(quantum number) ;  $n$



- 바닥상태(ground state) ; 가장 낮은 정상상태  
 $E_1 = -13.6 \text{ eV}$
- 첫 번째 들뜬상태(first excited state)  
 $E_2 = E_1/2^2 = -3.4 \text{ eV}$
- 이온화 에너지(ionization energy) ; 바닥상태의 전자를 양성자의 영향에서 완전히 벗어나게(이온화) 하기 위해 필요한 최소 에너지  
 $E_{\text{ion}} = 13.6 \text{ eV}$

전자가 바깥 궤도에서 안쪽 궤도로 건너될 때 방출되는 광자의 진동수는

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k e^2}{2 a_0 h} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k e^2}{2 a_0 h c} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (4.33)$$

Balmer의 실험식에서 Rydberg 상수로 표현한 식은

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (4.34)$$

Rydberg 상수는

$$R = \frac{ke^2}{2a_0hc}$$

### 수소형 원자

Bohr는  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ ,  $\text{Be}^{3+}$  (수소형 원자, 단일 전자를 갖는 원자)에 적용

$$r_n = (n^2) \frac{a_0}{Z} \quad (4.35)$$

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0} \left( \frac{Z^2}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.36)$$

### 예제 4.6 $\zeta$ -강아지별에서 온 스펙트럼

$\zeta$ -강아지별에서 관찰한 신비한 선 ; Edward Charles Pickering(1896)

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2} \right)$$

는  $\text{He}^+$ 로부터 나온 선임을 설명하라.

#### 풀이

$\text{He}^+$ 는  $Z=2$  이므로

$$E_n = \frac{ke^2}{2a_0} \left( \frac{4}{n^2} \right)$$

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{ke^2}{2a_0h} \left( \frac{4}{n_f^2} - \frac{4}{n_i^2} \right) = \frac{ke^2}{2a_0h} \left( \frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2} \right)$$

또는

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{ke^2}{2a_0hc} \left( \frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2} \right)$$

### 예제 4.7 수소에서의 전자의 전이

수소원자에서  $n=2$ 인 에너지 상태에서  $n=1$ 의 바닥상태로 전이한다.

(a) 방출된 광자의 파장, 진동수, 에너지를 구하라.

#### 풀이

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R}{4}$$

$$\lambda = \frac{4}{3R} = \frac{4}{3(1.097 \times 10^7 \text{m}^{-1})} = 1.215 \times 10^{-7} \text{m} = 121.5 \text{nm}$$



$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{m/s}}{1.215 \times 10^{-7} \text{m}} = 2.47 \times 10^{15} \text{Hz}$$

$$E = hf = (4.136 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s})(2.47 \times 10^{15} \text{Hz}) = 10.2 \text{eV}$$

(b) 되튐 수소원자의 운동량과 에너지를 구하라.

**풀이**

되튐 원자의 운동량은

$$mv = \frac{E_{\text{photon}}}{c}$$

$$E = E_i - E_f = E_{\text{photon}} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E \approx E_{\text{photon}} = 10.2 \text{eV}$$

을 가정하여

$$mv = 10.2 \text{eV}/c$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = (0.5) \frac{(10.2 \text{eV})^2}{mc^2} \\ &= \frac{(0.5)(10.2 \text{eV})^2}{938.8 \times 10^6 \text{eV}} = 5.56 \times 10^{-8} \text{eV} \end{aligned}$$

$$\frac{K}{E} = \frac{5.56 \times 10^{-8} \text{eV}}{10.2 \text{eV}} = 5.4 \times 10^{-9}$$

(광자의 에너지 = 에너지 준위 차이)를 가정하여 정확한 답을 구할 수 있다.

되튐 운동에너지는 거의 필요하지 않다.

**연습문제 3 예제 4.7에서 수소원자의 되튐 운동 에너지를  $1/2mv^2$ 으로 놓고 얻은**

$E \approx E_{\text{photon}}$ 을 대략적으로 점검하여라.

**연습문제 4**  $n=3$ 인 상태에서  $n=1$ 인 상태로 전이할 때 수소에서 방출된 광자의 파장은 얼마인가?

#### 예제 4.8 수소 원자의 발머 계열

(a) 방출된 광자의 가장 긴 파장과 이의 에너지를 구하라

**풀이**

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{max}}} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{36}{5R} = \frac{36}{5(1.097 \times 10^7 \text{m}^{-1})} = 656.3 \text{nm}$$

$$E_{\text{photon}} = hf = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^8 \text{m/s})}{656.3 \times 10^{-9} \text{m}} = 3.03 \times 10^{-19} \text{J} = 1.89 \text{eV}$$

(b) 발머 계열에서 방출된 가장 짧은 파장의 광자를 구하라.

**풀이**

$$\frac{1}{\lambda_{\text{min}}} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{R}{4}$$

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{4}{R} = \frac{4}{1.097 \times 10^7 \text{m}^{-1}} = 364.6 \text{nm} \text{ 자외선 영역}$$

**연습문제 5** 수소원자의 발머 계열에서 방출된 가장 짧은 파장을 가진 광자의 에너지를 구하여라. **답 3.40eV**

### Bohr의 업적

1913년 세 부분으로 된 논문에서

- ☀️ 수소의 흡수 스펙트럼에서, 방출 스펙트럼에서보다 제한된 수의 선이 보이는 이유를 설명
- ☀️ 원자로부터 나오는 x-선의 방출을 설명
- ☀️ β선은 핵으로부터 나오는 전자
- ☀️ 원자의 화학적 성질을 전자껍질 모형으로 설명
- ☀️ 원자들이 어떻게 분자를 구성하는가를 설명

### 예제 4.9 첫 번째 들뜬상태에 있는 수소

많은 수소 원자가 첫 번째 들뜬상태( $n=2$ )에 있을 온도를 계산하라. 이 온도에서 어떤 계열의 흡수가 현저하겠는가?

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/k_B T} = e^{-\Delta E/k_B T}$$

$$\text{mean thermal energy} = \frac{3}{2} k_B T$$

**풀이**

$$E_2 - E_1 = (-3.4 \text{eV}) - (-13.6 \text{eV}) = 10.2 \text{eV}$$

$$\frac{3}{2} k_B T \approx 10.2 \text{eV}$$

$$T = \frac{10.2 \text{eV}}{(3/2)k_B} = \frac{10.2 \text{eV}}{(1.5)(8.62 \times 10^{-5} \text{eV/K})} = 79,000 \text{K}$$

온도  $T$ 에서 에너지가  $E$ 인 원자를 발견할 확률은

$$P(E) = P_0 e^{-(E - E_0)/k_B T}$$

$P_0$ 는 바닥상태에서 원자를 발견할 확률.

온도  $T$ 의 열평형 상태에서, 두 에너지 준위에 있는 원자수의 비율은

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{P(E_2)}{P(E_1)} = e^{-(E_2 - E_1)/k_B T}$$

수소 원자의 10%가  $n = 2$ 인 상태에 있는 온도를 구한다.

$$\frac{N_2}{N_1} = 0.10 = e^{-(10.2\text{eV})/k_B T}$$

$$\ln(0.10) = \frac{-10.2\text{eV}}{k_B T}$$

$$T = -\frac{10.2\text{eV}}{k_B \ln(0.10)}$$

$$= -\frac{10.2\text{eV}}{8.62 \times 10^{-5}\text{eV/K} \ln(0.10)} = 51,000\text{K}$$

별의 대기에서처럼 흡수 기체가 매우 뜨겁다면 발머 계열이 흡수선에 나타날 것임을 보여 준다.

### 원자의 껍질 구조에 대한 Bohr의 생각

- ☀ 더 높은 원자 번호를 가진 원소 속의 전자는 각각의 고리 또는 껍질에 허용된 특정 개수의 전자를 갖는 안정한 동심 고리를 형성한다
- ☀ 최외각 고리에 있는 전자의 수가 원자를 결정한다.
- ☀ 철족(Fe, Co, Ni)과 희토류 원소들은 원소의 최외각에 있는 전자의 배치는 동일하고, 에너지적으로 보면 전자들을 안쪽 껍질에 채우는 것이 더 안정하다.

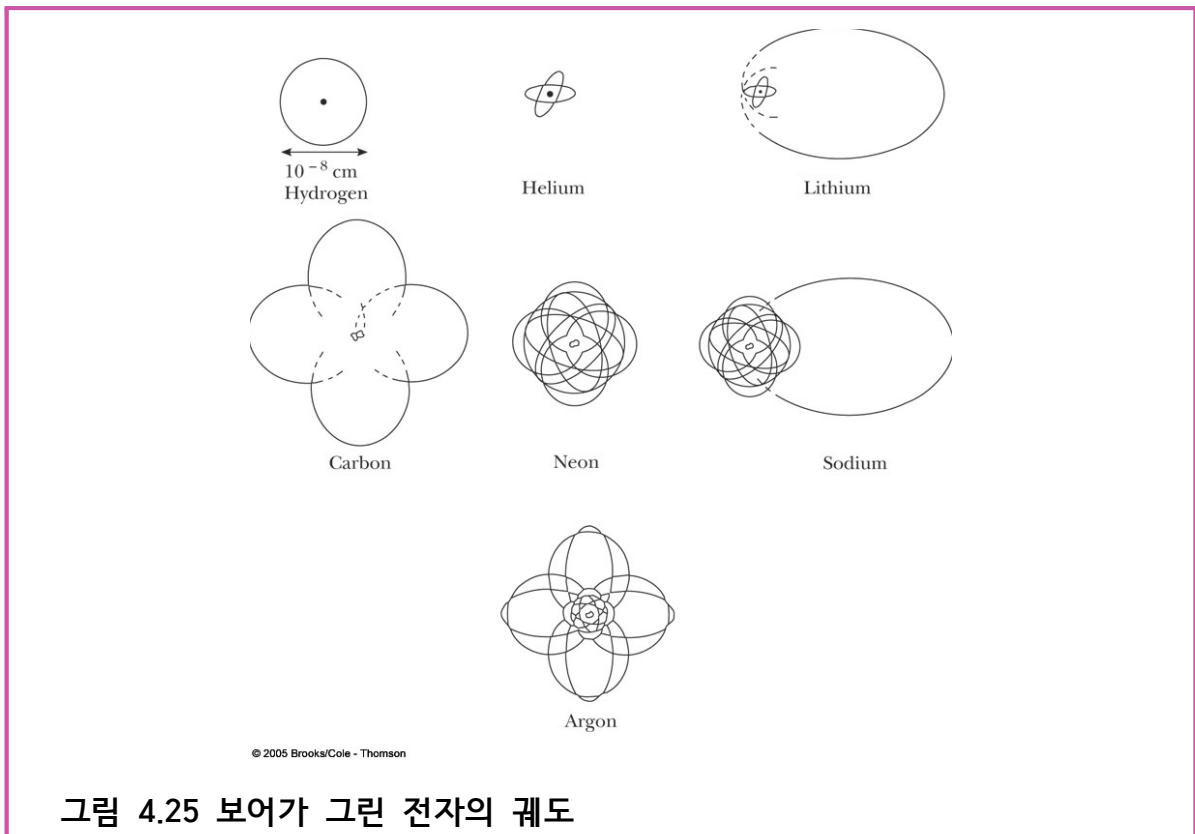


그림 4.25 보어가 그린 전자의 궤도

## 4.4 보어의 대응원리, 각운동량은 왜 양자화되는가?

### 대응원리(correspondence principle)

- 고전 이론이 성립하는 크기의 영역에서는, 양자론의 예측이 고전 물리의 예측과 대응해야만 한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{quantum physics}] = [\text{classical physics}]$$

### Bohr의 원자모형에서의 대응원리로부터 각운동량의 양자화 조건의 유도

- 맥스웰의 고전적 전자기 복사법칙(궤도진동수  $f$ 인 전하는 진동수  $f$ 인 광파를 방출한다)과 빛의 방출( $\Delta E = hf$ )의 양자화 조건은, 매우 큰 전자 궤도의 경우에는 동시에 성립한다.

$$E = -\frac{ke^2}{2r}$$

$$L = m_e v r = m_e \omega r^2$$

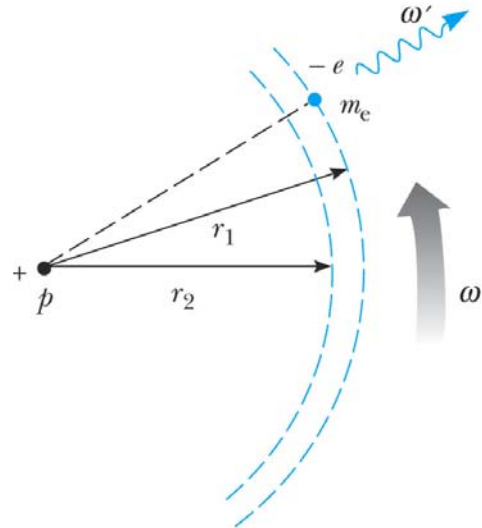
$$\frac{1}{r} = \frac{m_e k e^2}{L^2}$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{m_e k^2 e^4}{L^2} \quad (4.37)$$

$$\frac{dE}{dL} = \frac{m_e k^2 e^4}{L^3} \quad (4.38)$$

$$L^3 = \frac{m_e k^2 e^4}{\omega} \quad (\text{문제 30})$$

$$\frac{dE}{dL} = \frac{m_e k^2 e^4}{(m_e k^2 e^4 / \omega)} = \omega \quad (4.39)$$



$$dE = \omega dL$$

또는

$$\hbar \omega' = \omega dL$$

$\omega'$ ; 광자의 진동수  $\omega$ ; 전자의 궤도 진동수이나 큰 궤도에서 대응원리를 적용하면

$$\omega' = \omega$$

$$\hbar \omega = \omega dL \quad (4.40)$$

또는

$$dL = \hbar \quad (4.41)$$

전자의 각운동량의 변화는 항상  $\hbar$ 이다.

(문제 30)  $L = m_e \omega r^2$  and  $L^2 = m_e k e^2 r$

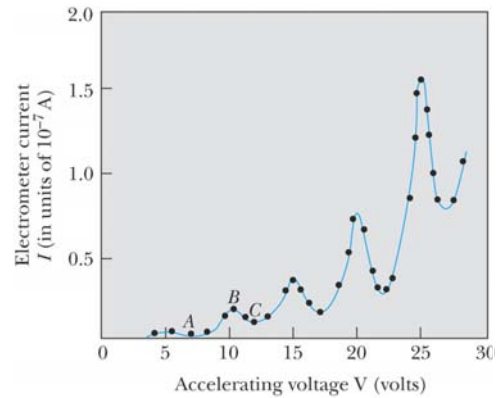
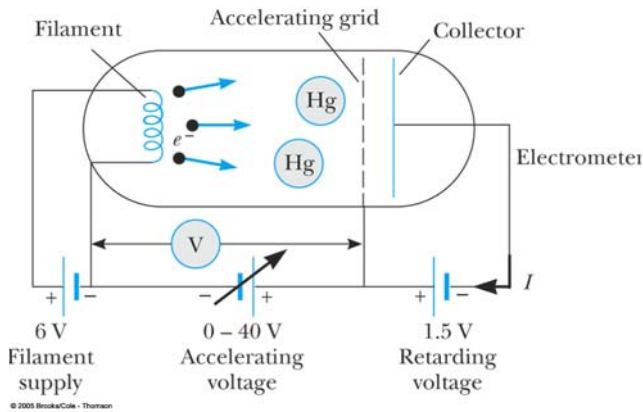
$$L^4 = m_e^2 k^2 e^4 r^2 = m_e^2 k^2 e^4 \cdot \frac{L}{m_e \omega} \Rightarrow L^3 = \frac{m_e k^2 e^4}{\omega}$$

$$L = m_e v r = n \hbar \quad (4.42)$$

“이런 불확실하고 모순된 기반 위에서 보어는 중요한 법칙을, 그리고 그것이 나에게서는 기적으로 보였던-그리고 심지어는 오늘날까지도 기적처럼 보이는-화학에서 갖는 의미를 발견하였다. 이것은 사고의 창공에서 최고의 선율이다.” Einstein

## 4.5 원자 에너지 준위의 직접적인 확인 : 프랑크-헤르츠 실험

### James Franck and Gustav Hertz(1914)의 실험



- 수은 원자의 양자화 된 에너지 준위
- 원자 내의 양자화 된 에너지 준위의 존재를 확실하게 실험적으로 보여주는 실험
- 원자 내의 에너지 양자화는 일반적인(수소원자에 국한되지 않는) 현상임을 보여 준다.
- 인접한 최대와 최소의 평균값 :  $4.9 \pm 0.1V \rightarrow$  바닥상태와 첫 번째 들뜬 상태의 간격

$$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{4.9 \text{ eV}} = 253 \text{ nm}$$

- 가속전압이 4.9V를 넘자마자 254nm 파장의 빛이 방출된다.
- 원자에서 불연속적인 에너지 준위에 대한 보어의 개념과 광 방출의 과정을 직접적인 실험으로 확인  $\rightarrow$  1925년 노벨상 수상

### ■ Niels Bohr의 수소원자모형

원자의 반경 :  $\sim 10^{-10}\text{m}$

핵의 반경 :  $10^{-14} \sim 10^{-15}\text{m}$ , 양전하

고전역학과 고전전자기학의 이론에 의하면

1. 전자와 양성자(핵)은 전기력  $F = kq_1q_2/r^2$ 를 작용하고
2. 전자의 타원운동  $\rightarrow$  전자파를 방출한다.
3. Energy의 손실로 전자는 나선형으로 핵 속으로 빨려든다.

$\rightarrow$  따라서 전자가 핵 주위를 선회한다는 고전 물리적 해석은 정확하지 않다.

Bohr의 주장 : 고전역학 및 전기역학으로는 원자 안에 있는 전자에 대하여 안정한 위치를 추론할 수 없다.

### Bohr의 가설

1. 안정한 궤도상의 전자는 전자파를 복사하지 않는다.
2. 전자가 하나의 안정궤도에서 다른 궤도로 천이할 때 복사가 일어난다.

복사파의 진동수

$$hf = W_1 - W_2 \quad (3.23)$$

Bohr는 이 가설과 '대응원리'를 토대로 수소원자의 spectrum을 설명한다.

전자의 궤도 : 원 궤도

potential energy는

$$U = -\frac{KZe^2}{r}$$

전자가 갖는 총 에너지는 운동에너지와 위치에너지의 합이므로

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{KZe^2}{r}$$

$$\frac{KZe^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{KZe^2}{r}$$

$$\therefore W = -\frac{1}{2} \frac{KZe^2}{r}$$

$r_1 \rightarrow r_2$  로 전이할 때

$$f = \frac{W_1 - W_2}{h} = \frac{1}{2} \frac{KZe^2}{h} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Balmer-Ritz의 공식

$$f = c\bar{f} = cR \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

여기서 전자궤도의 반지름이  $r_n = n^2 r_0$  로 두면

원자의 에너지는 양자화되고

$$W_n = -\frac{1}{2} \frac{KZe^2}{r_0} \frac{1}{n^2} \quad (3.30) \quad (3.36)$$

따라서 복사파의 진동수는

$$f = \frac{1}{2} \frac{KZe^2}{hr_0} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (3.32)$$

**Bohr의 대응원리(correspondence principle) :** 전하가 진동(가속운동)할 때 이 진동수의 전자파가 복사된다는 고전전자기학의 이론은 (4-23)식의 근사관계이다.

$n_1 = n, n_2 = n - 1, n \gg 1$ 인 경우

$$\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \approx \frac{2}{n^3}$$

(4-23)식으로부터

$$f \approx \frac{KZe^2}{hr_0 n^3} \quad n \gg 1 \text{인 경우}$$

$$f_{rev} = \frac{v}{2\pi r}$$

$$f_{rev}^2 = \frac{v^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{KZe^2}{4\pi^2 m r^3} = \frac{KZe^2}{4\pi^2 m r_0^3} \cdot \frac{1}{n^6}$$

$f_{rev}^2 = f^2$  으로 놓으면

$$\frac{K^2 Z^2 e^4}{h^2 r_0^2 n^6} = \frac{KZe^2}{4\pi^2 m r_0^3 n^6}$$

또는

$$r_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 K e^2 m} \frac{1}{Z} = \frac{a_0}{Z}$$

따라서

$$a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 K e^2 m} \quad : \text{Bohr의 반지름}$$

$\rightarrow Z=1$ 인 경우의 최소 반지름

$$a_0 \approx 0.529 \text{ \AA}$$

(4-25)를 (4-23)에 대입하면

$$f = Z^2 \frac{2\pi^2 m K^2 e^4}{h^3} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

Balmer-Ritz의 실험공식

$$f_R = cR = \frac{2\pi^2 m K^2 e^4}{h^3}$$

Bohr의 계산(1913)  $cR = 3.1 \times 10^{15}$

분광학적 실험치  $cR=3.29 \times 10^{15}$

☀ 이러한 일치(?)가 우연히 일어날 수 있겠는가?

→ Bohr의 가설(수소원자모형)이 타당하다는 증거가 되지 않겠는가?

수소원자의 가능한 에너지 값

$$W_n = - \left( \frac{2\pi^2 K^2 e^4 m}{h^2} \right) \frac{Z^2}{n^2} = - Z^2 \frac{E_1}{n^2}$$

$$E_1 = (2\pi^2 K^2 e^4 m) / h^2 \approx 13.6 eV \quad \rightarrow \text{수소원자의 이온화 에너지, 결합에너지}$$

### Bohr의 계산치와 실험치와의 차이를 줄이기 위한 시도

- 환산질량 : 유한한 핵의 질량으로 말미암아 원자의 운동에너지는 전자뿐만 아니라 핵도 운동에너지를 갖는다.

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{p^2}{2M}, \quad p = MV : \text{핵의 운동량}$$

원자의 총운동량은 zero 이므로 원자의 총운동에너지는

$$E_K = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} = \frac{M+m}{2mM} p^2 = \frac{p^2}{2\mu}$$

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+m/M} : \text{환산질량(reduced mass)}$$

☀ Rydberg상수의 더 정확한 계산 → 실험치와 더 접근

☀ 원자의 종류에 따른 Rydberg 상수의 변화량의 예측이 가능

☀ 수소의 경우 1/2000 정도의 수정이 가능, 다른 핵의 경우 이 보다 적은 값으로 수정된다.

### Bohr의 가설

1. 안정스러운 궤도 : 전자파를 방출하지 않는다.

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (3.24)$$

2. 전자파의 방출 : 양자화된 궤도 사이의 천이

$$hf = W_1 - W_2 \quad \text{or} \quad f = \frac{W_1 - W_2}{h}$$

위 두식으로부터 (4-29)식이 유도된다.

$$f = Z^2 \frac{2\pi^2 m K^2 e^4}{h^3} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

$n_2 = 2, n_1 = 3, 4, 5$  : Balmer 계열 (1885) 가시광선영역

$n_2 = 3, n_1 = 4, 5, 6$  : Paschen 계열 (1908) 적외선영역

$n_2 = 1, n_1 = 2, 3, 4$  : Lyman 계열 (1916) 자외선영역

$n_2 = 4, n_1 = 5, 6, 7$  : Brackett 계열 (1922) 적외선영역

$n_2 = 5, n_1 = 6, 7, 8$  : Pjund 계열 (1924) 적외선영역



$$E_n = - \left( \frac{2\pi^2 K^2 e^4 m}{h^2} \right) \frac{Z^2}{n^2}$$

Sommerfeld의 특수상대론적 고찰

### ■ 미세구조분할

Bohr 모형을 타원궤도로 확장

Newton 역학 : 에너지는 타원의 장축에만 관계한다.

상대론적 보정 : Sommerfeld

이심률이 큰 궤도에서의 수정

핵 가까이에서의 수정, 핵 가까이 접근하는 전자는 큰 속도를 가지게 되어

$$v^2/c^2 \neq 0$$

수소의 어떤 spectrum은 매우 인접한 여러개의 선으로 구성

장축은 같으나 이심률이 달라 에너지의 차가 아주 작은 일련의 타원궤도가 있다.

---

[End]